TITLE:

非線型Fokker-Planck方程式の臨界緩和("非平衡定常状態の研究",科研費「物性の制御」班研究会報告)

AUTHOR(S):

八幡, 英雄

CITATION:

八幡, 英雄. 非線型Fokker-Planck方程式の臨界緩和("非平衡定常状態の研究",科研費「物性の制御」班研究会報告). 物性研究 1974, 22(5): 528-529

ISSUE DATE:

1974-08-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/88828

非線型Fokker–Planck 方程式の臨界緩和

広島大・理　八　幡　英　雄

連続スピン変数 a(x) の分布が密度函数

$$w[a_q]=N\exp\Big[-\frac{1}{2}\int_{|q|<1}u(q)\,a_q a_{-q}-\sum_{n=2}^{\infty}\int_{|q_1|,\cdots,|q_{2n}|<1}u_{2n}(q_1,\cdots,q_{2n})\,\delta(q_1+\cdots+q_{2n})\,a_{q_1}\cdots a_{q_{2n}}\Big] \quad (1)$$

で与えられるWilson模型を考える。但し，$a_q=\int_q e^{iqx}a_q$，$\int_q=\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dq$，dは系の次元をあらわす。$w[a_q]$ を平衡分布とにもつような動的過程のうち，もっとも簡単な模型として，系の時間発展を記述する条件付確率密度 $P[\alpha_q(t)=a_q\,|\,\alpha_q(t^\circ)=a_q^\circ]$ が Fokker-Planck方式

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}-\gamma\int_{|q|<1}\frac{\delta}{\delta a_q}\Big(-\frac{\delta\ln w}{\delta a_{-q}}+\frac{\delta}{\delta a_{-q}}\Big)\Big]P[\alpha_q(t)=a_q\,|\,\alpha_q(t^\circ)=a_q^\circ]=0 \qquad (2)$$

に従うものを考えることにすると，この方程式の主要解は経路積分の形にかくことができて，

$$P[\alpha_q(t)=a_q\,|\,\alpha_q(t^\circ)=a_q^\circ]=\int_{(\{a_q^\circ\},t^\circ)}^{(\{a_q\},t)}e^{S}\prod_{0<|q|<1}\mathcal{D}\alpha_q(\tau) \qquad (3)$$

$$S=-\int_{t^\circ}dt\int_{|q|<1}\Big[\frac{1}{4\gamma}\Big|\frac{d\alpha_q}{dt}-\gamma\frac{\delta\ln w}{\delta\alpha_{-q}}\Big|^2+\gamma\frac{\delta^2\ln w}{\delta\alpha_q\delta\alpha_{-q}}\Big] \qquad (4)$$

となる。Wilsonが(1)に対して行った，くりこみ群変換を今は(3)に対して行うことにし，波数空間 $0<|q|<1$ を長波長部分 $0<|q|<b^{-1}$と，短波長部分 $b^{-1}<|q|<1$ に分け，(3)を短波長変数について積分したときに $\Big(\int e^{S}w[a_q^\circ]\prod_{b^{-1}<|q|<1}da_q\mathcal{D}\alpha_q(\tau)\,da_q^\circ\Big)$，長波長モード間の相互作用がどのような変化をうけるかをしらべる。この系の臨界的ふるまいは，長波長モードのゆらぎによって規定されているから，これら臨界モード間の結合係数は短波長モードをくりかえし消去していった後の相互作用の漸近形（固定点相

互作用)として与えられるであろうと考え，$\varepsilon^2(\varepsilon=4-d)$ までの精度で，(3)における結合係数の固定点を求めた。この変換の際に，波数qと振動数ωに旋す scale 変換 $bq=q'$，$b^z\omega=\omega'$ から，臨界振動数の波数依存性 $\omega\sim q^z$ が与えられ，zは ε^2までの精度で，Halperin - Hohenberg - Maの結果 $(z=2+(6\ln\frac{4}{3}-1)\eta,\ \eta=\frac{\varepsilon^2}{54})$ を再現する。

hard mode は存在するか

(幾つかの巨視変数を持つ系の運動)

東大理　松尾和洋

巨視的な系の運動を記述する試みとして系の運動を birth and death process として表現し，マスター方程式に system size expansionを行う方法がある。[1] これを用いると，巨視変数の平均値 $\underset{\sim}{y}$，variauce $\underline{\underline{\sigma}}$ etcに関する evolution equations が遷移確率のモーメントを用いて以下の様に表わせる。

$$\begin{cases} \dot{\vec{y}}=\vec{C}_1(\vec{y},t) & (1)\\ \dot{\sigma}=K\sigma+\widetilde{K}\sigma+C_2(\vec{y},t) & (2)\end{cases}$$

ここでCnは遷移確率のn次のモーメントでn階のテンソルであり，また

$$K_{\alpha\beta}=\frac{\partial C_{1\alpha}}{\partial y_\beta}$$

は regression matrixで　～は transpose を取るものとする。

この evolution equations を見て明らかな様に，系の振舞いの特徴的な性質は平均値の運動を記述する方程式(1)の中に含まれている。云い換えれば，この method が用いられる場合には，巨視変数の運動を記述する現象論的方程式から，それらの変数のゆらぎの性質もほぼ理解されることになる。

方程式(1)は一般に非線型であるから，全域に渡ってその振舞いを解析的に調べることは一般には出来ない。しかし必ずしもそれを知る必要のない場合が多い。

特に重要であり興味があるのは，微分方程式(1)の平衡点，特異点，あるいは limit cycle等の安定性とそのまわりでの運動である。以下で，主要なもののみについて考察